Corrigé Maths II , TSI 2011

Elhor Abdelali , CPGE Mohammedia

Premier problème

Première partie

Quelques propriétés de Φ_p

1.1.

1.1.1. Soit $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.

On a , $\Phi_p(x) = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{0, ..., p-1\}$, $P_x(\omega_p^k) = 0$, ce qui veut dire que les p complexes distincts $1, \omega_p, ..., \omega_p^{p-1}$ sont racines du polynôme P_x et comme celui-ci est clairement dans $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ on a le résultat demandé .

1.1.2.

• Pour $x = (x_0, ..., x_{p-1})$, $x' = (x'_0, ..., x'_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ on a clairement ,

$P_{x+\alpha x'} = \sum_{j=0}^{p-1}(x_j + \alpha x'_j)X^j = \sum_{j=0}^{p-1} x_j X^j + \alpha \sum_{j=0}^{p-1} x'_j X^j = P_x + \alpha P_{x'}$, et donc pour tout entier $k \in \{0, ..., p-1\}$ on a , $P_{x+\alpha x'}(\omega_p^k) = P_x(\omega_p^k) + \alpha P_{x'}(\omega_p^k)$, ce qui veut dire que , $\Phi_p(x + \alpha x') = \Phi_p(x) + \alpha \Phi_p(x')$ et donc que Φ_p est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^p$.

• L'endomorphisme Φ_p étant injectif (d'après **1.1.1.**) et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ étant de dimension finie p on conclut que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

1.2.

1.2.1. Par définition de M on a pour tout $(i, j) \in \{0, ..., p-1\}^2$, $m_{i,j}$ est égal à la composante suivant e_i du vecteur $\Phi_p(e_j)$ et donc que , $m_{i,j} = P_{e_j}(\omega_p^i) = \omega_p^{ij}$.

1.2.2. On a donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_p & \omega_p^2 & \dots & \omega_p^{p-1} \\ 1 & \omega_p^2 & \omega_p^4 & \dots & \omega_p^{2(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_p^{p-1} & \omega_p^{2(p-1)} & \dots & \omega_p^{(p-1)^2} \end{pmatrix}$ et on reconnait la matrice de **Vandermonde** du p-uplet complexe $(1, \omega_p, ..., \omega_p^{p-1})$ et donc en particulier on a , $detM = \prod_{0 \le i < j \le p-1} (\omega_p^j - \omega_p^i) \neq 0$, ce qui veut dire que M est inversible et on retrouve le fait que l'endomorphisme Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.

1.3.

1.3.1.

• Si $i = j$ on a clairement , $\sum_{k=0}^{p-1} \omega^{(i-j)k} = p$.

• Sinon on a $\omega^{i-j} \neq 1$ et donc $\sum_{k=0}^{p-1} \omega^{(i-j)k} = \dfrac{1-\omega_p^{(i-j)p}}{1-\omega_p} = 0$, car $\omega_p^p = 1$.

1.3.2.

$$\sum_{k=0}^{p-1} |y_k|^2 = \sum_{k=0}^{p-1} |P_x(\omega_p^k)|^2 = \sum_{k=0}^{p-1} \left| \sum_{j=0}^{p-1} x_j \omega_p^{kj} \right|^2 = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} x_i \omega_p^{ki} \right) \overline{\left(\sum_{j=0}^{p-1} x_j \omega_p^{kj} \right)}$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{(i,j)\in\{0,\dots,p-1\}^2} x_i \overline{x_j} \omega_p^{(i-j)k}$$
$$= \sum_{(i,j)\in\{0,\dots,p-1\}^2} x_i \overline{x_j} \sum_{k=0}^{p-1} \omega_p^{(i-j)k} \text{ (par inversion des deux sommes)}$$
$$= \sum_{i=0}^{p-1} x_i \overline{x_i} p = p \sum_{k=0}^{p-1} |x_k|^2 \text{ (en utilisant } \mathbf{1.3.1.}\text{) .}$$

D'où , $\Phi_p(x) = y = (y_0, ..., y_{p-1}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{p-1} |y_k|^2 = 0 \Leftrightarrow p \sum_{k=0}^{p-1} |x_k|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
et on retrouve l'injectivité de l'endomorphisme Φ_p .

1.4.

1.4.1.

Par définition du produit matriciel on a pour tout $(i, j) \in \{0, ..., p-1\}^2$,
$\left(\overline{M}M\right)_{i,j} = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{m_{i,k}}\, m_{k,j} = \sum_{k=0}^{p-1} \omega_p^{(j-i)k}$ et on voit en utilisant **1.3.1.** que ,
$\overline{M}M = pI_p$, où I_p désigne la matrice unité d'ordre p .

1.4.2.

On retrouve l'inversibilité de M avec en plus l'expression de son inverse ,
$M^{-1} = \dfrac{1}{p}\overline{M}$.

Deuxième partie

Un peu d'algorithmique

2.1.

2.1.1. Montrons par une récurrence finie sur $k \in \{0, ..., p-1\}$ qu'à l'étape k de la boucle on a : $E_k = \omega_p^k$, $F_k = \omega_p^k \gamma_k$, $\alpha_k = \beta_k + \omega_p^k \gamma_k$ et $\alpha_{k+\frac{p}{2}} = \beta_k - \omega_p^k \gamma_k$.

• *initialisation* : l'algorithme montre clairement qu'à l'étape 0 de la boucle on a ,
$E_0 = 1$, $F_0 = \gamma_0$, $\alpha_0 = \beta_0 + \gamma_0$ et $\alpha_{\frac{p}{2}} = \beta_0 - \gamma_0$.

• *hérédité* : si la propriété est vraie pour un certain $k \in \{0, ..., p-2\}$ l'algorithme montre aussi clairement qu'à l'étape $k+1$ de la boucle on a : $E_{k+1} = \omega_p E_k = \omega_p^{k+1}$ $F_{k+1} = E_{k+1}\gamma_{k+1} = \omega_p^{k+1}\gamma_{k+1}$, $\alpha_{k+1} = \beta_{k+1} + F_{k+1} = \beta_{k+1} + \omega_p^{k+1}\gamma_{k+1}$ et $\alpha_{k+1+\frac{p}{2}} = \beta_{k+1} - F_{k+1} = \beta_{k+1} - \omega_p^{k+1}\gamma_{k+1}$ ce qui achève la récurrence .

2.1.2. Comme , $\Phi_{\frac{p}{2}}(b) = (\beta_0, ..., \beta_{\frac{p}{2}-1})$ et $\Phi_{\frac{p}{2}}(c) = (\gamma_0, ..., \gamma_{\frac{p}{2}-1})$ on a pour tout $k \in \{0, ..., \frac{p}{2} - 1\}$, $\beta_k = P_b(\omega_{\frac{p}{2}}^k) = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} b_j \omega_{\frac{p}{2}}^{kj} = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j}\omega_p^{2kj}$ et

$\gamma_k = P_c(\omega_{\frac{p}{2}}^k) = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} c_j \omega_{\frac{p}{2}}^{kj} = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j+1}\omega_p^{2kj}$, vu que $\omega_{\frac{p}{2}} = \omega_p^2$, et on voit que

pour tout $k \in \{0, ..., \frac{p}{2} - 1\}$, $\beta_k + \omega_p^k\gamma_k = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j}\omega_p^{2kj} + \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j+1}\omega_p^{k(2j+1)}$

ce qui s'écrit aussi $\forall k \in \{0, ..., \frac{p}{2} - 1\}$, $\alpha_k = \beta_k + \omega_p^k\gamma_k = \sum_{j=0}^{p-1} a_j\omega_p^{kj}$

et comme on a aussi pour tout $k \in \{0, ..., \frac{p}{2} - 1\}$,

$$\alpha_{k+\frac{p}{2}} = \beta_k - \omega_p^k\gamma_k = \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j}\omega_p^{2kj} - \sum_{j=0}^{\frac{p}{2}-1} a_{2j+1}\omega_p^{k(2j+1)} = \sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j a_j\omega_p^{kj}$$
$$= \sum_{j=0}^{p-1} a_j\omega_p^{(k+\frac{p}{2})j} \text{ , car } \omega_p^{\frac{p}{2}} = e^{i\pi} = -1 \text{ ,}$$

on voit que , $\forall k \in \{0, ..., p-1\}$, $\alpha_k = \sum_{j=0}^{p-1} a_j\omega_p^{kj} = P_a(\omega_p^k)$

c'est à dire que , $\Phi_p(a) = (\alpha_0, ..., \alpha_{p-1})$.

2.2.

2.2.1

• Le calcul de $\Phi_2(a_0, a_1) = (a_0 + a_1, a_0 - a_1)$ nécessite 2 additions et 0 multiplications , soit $s_1 = 2$ et $r_1 = 0$.

• L'algorithme décrit dans la question **2.1.** permettant de calculer $\Phi_{2^n}(a_0, ..., a_n)$ à partir de $\Phi_{2^{n-1}}(a_0, a_2, ..., a_{2^n-2})$ et de $\Phi_{2^{n-1}}(a_1, a_3, ..., a_{2^n-1})$ nécessite 2 additions et 2 multiplications à chacune de ses $\frac{p}{2} = 2^{n-1}$ étapes ce qui se traduit par la relation récurrente $\begin{cases} s_n = 2s_{n-1} + 2^n \\ r_n = 2r_{n-1} + 2^n \end{cases}$.

2.2.2

• La relation $\left\{\begin{array}{l} s_n = 2s_{n-1} + 2^n \\ r_n = 2r_{n-1} + 2^n \end{array}\right.$ s'écrivant aussi $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{s_n}{2^n} = \dfrac{s_{n-1}}{2^{n-1}} + 1 \\ \\ \dfrac{r_n}{2^n} = \dfrac{r_{n-1}}{2^{n-1}} + 1 \end{array}\right.$

on voit que $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{s_n}{2^n} = \dfrac{s_1}{2^1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{s_k}{2^k} - \dfrac{s_{k-1}}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} 1 = n \\ \dfrac{r_n}{2^n} = \dfrac{r_1}{2^1} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{r_k}{2^k} - \dfrac{r_{k-1}}{2^{k-1}} = 0 + \sum_{k=2}^{n} 1 = n - 1 \end{array}\right.$

et donc que $\left\{\begin{array}{l} s_n = n2^n \\ r_n = (n-1)2^n \end{array}\right.$ puis que le nombre total des additions et multiplications nécessaires au calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ est , $s_n + r_n = (2n-1)2^n = p\left(\dfrac{2\ell n(p)}{\ell n 2} - 1\right)$

2.3. Coût du calcul de $\Phi_p(a)$ par l'algorithme de Horner

2.3.1. Il faut ,

1 addition et 1 multiplication pour calculer $\lambda a_{p-1} + a_{p-2}$

1 addition et 1 multiplication pour calculer $(\lambda a_{p-1} + a_{p-2})\, \lambda + a_{p-3}$

jusqu'à

1 addition et 1 multiplication pour calculer ,

$P_a(\lambda) = (..\, ((\lambda a_{p-1} + a_{p-2})\, \lambda + a_{p-3})\, ..a_1)\, \lambda + a_0$

soit , $p-1$ additions et $p-1$ multiplications pour calculer $P_a(\lambda)$

soit , $2p-2$ additions et multiplications pour calculer $P_a(\lambda)$.

2.3.2 Le calcul de chaque composante $\alpha_k = P_a(\omega_p^k)$ de $\Phi_p(a)$ nécessitant $2p-2$ additions et multiplications , on voit que la calcul de $\Phi_p(a)$ par l'algorithme de Horner nécessite $2p(p-1)$ additions et multiplications .

2.3.3

• Le nombre d'opérations (additions et multiplications) que nécessite le premier algorithme (décrit dans **2.1.**) pour le calcul de $\Phi_p(a)$ étant ,

$\dfrac{2p\ell n(p)}{\ell n 2} - p =_{p\to\infty} O(p\ell n(p))$

• le nombre d'opérations (additions et multiplications) que nécessite l'algorithme de Horner (décrit dans **2.3.**) pour le calcul de $\Phi_p(a)$ étant ,

$2p(p-1) =_{p\to\infty} O(p^2)$,

on voit que , pour p assez grand , le premier algorithme est plus rapide dans le calcul de $\Phi_p(a)$ que l'algorithme de Horner .

Deuxième problème

Première partie

1.1.

On a $\lim_{x\to-\infty} P_{a,b}(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_{a,b}(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

donc en particulier on peut trouver deux réels α et β tels que $\begin{cases} \forall x \leq \alpha \ , \ P_{a,b}(x) \leq -1 \\ \forall x \geq \beta \ , \ P_{a,b}(x) \geq 1 \end{cases}$

et comme la fonction polynômiale $P_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un réel $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $P_{a,b}(\gamma) = 0$, ce qui veut dire que le polynôme $P_{a,b}$ admet au moins une racine réelle .

1.2. $(a, b) \neq (0, 0)$.

1.2.1. Si $t \in \mathbb{R}$ est une racine double de $P_{a,b}$ alors on doit avoir $P_{a,b}(t) = P'_{a,b}(t) = 0$

c'est à dire $\begin{cases} t^3 - 3at + 2b = 0 \\ 3t^2 - 3a = 0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} 3at^3 - t^3 = 2b \\ t^2 = a \end{cases}$ soit $a = t^2$ et $b = t^3$

et dans ce cas on a clairement $P_{a,b}(X) = X^3 - 3t^2X + 2t^3 = (X - t)^2(X + 2t)$.

1.2.2. Si $a^3 = b^2$ c'est que $a \neq 0$ (vu que $(a, b) \neq (0, 0)$) d'où en posant $t = \dfrac{b}{a} \neq 0$

on a $t^2 = \dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{a^3}{a^2} = a$ et $t^3 = \dfrac{b^3}{a^3} = \dfrac{b^3}{b^2} = b$ et par suite $P_{a,b}(X) = (X-t)^2(X+2t)$ et on voit que t est bien une racine double du polynôme $P_{a,b}$.

1.3.

- On a d'après **1.2.1.** , $(a, b) \in \Gamma \setminus \{(0, 0)\} \Rightarrow (a, b) \in \{(t^2, t^3) \ ; \ t \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\}$
- Et on a , $(a, b) \in \{(t^2, t^3) \ ; \ t \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\} \Rightarrow a^3 = b^2 \ et \ (a, b) \neq (0, 0)$ et donc d'après **1.2.2.** , $(a, b) \in \Gamma \setminus \{(0, 0)\}$. D'où $\Gamma \setminus \{(0, 0)\} = \{(t^2, t^3) \ ; \ t \in \mathbb{R}\} \setminus \{(0, 0)\}$

et comme on a clairement $(0, 0) \in \{(t^2, t^3) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}$, et $(0, 0) \in \Gamma$ vu que le polynôme $P_{0,0} = X^3$ admet une racine au moins double , on a le résultat demandé.

1.4. $(a, b) \notin \Gamma$ signifie que $P_{a,b}$ est à racines simples et comme il est à coefficients réels les deux racines complexes distinctes x_1 et x_2 sont soit toutes les deux réelles soit non réelles conjuguées , et dans les deux cas on a

$((c - x_1)(c - x_2))^2 = |c - x_1|^2|c - x_2|^2$.

1.4.1.

- En effectuant la division euclidienne de $X^3 - 3aX + 2b$ par $X - c$ on trouve ,

$P_{a,b} = X^3 - 3aX + 2b = (X - c)(X^2 + cX + c^2 - 3a)$ et comme on a aussi ,

$P_{a,b} = X^3 - 3aX + 2b = (X - c)(X - x_1)(X - x_2)$ on voit que $\begin{cases} x_1 + x_2 = -c \\ x_1x_2 = c^2 - 3a \end{cases}$

d'où $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 12a - 3c^2 = -3(c^2 - 4a)$ et on voit que , $\boxed{\Delta = -3|c - x_1|^2|c - x_2|^2(c^2 - 4a)}$.

• Et comme on a aussi $(x_1 - x_2)^2 = 3a - 3(c^2 - 3a) = 3(a - x_1x_2)$ et donc par symétrie , $(c - x_1)^2 = 3(a - cx_1)$ et $(c - x_2)^2 = 3(a - cx_2)$ on voit que ,

$\Delta = 27(a - cx_1)(a - cx_2)(a - x_1x_2)$
$\Delta = 27\left(a^3 - (cx_1 + cx_2 + x_1x_2)a^2 + cx_1x_2(c + x_1 + x_2)a - (cx_1x_2)^2\right)$

or $P_{a,b} = X^3 - 3aX + 2b = (X - c)(X - x_1)(X - x_2)$ d'où par développement ,

$\begin{cases} c + x_1 + x_2 = 0 \\ cx_1 + cx_2 + x_1x_2 = -3a \\ cx_1x_2 = -2b \end{cases}$ ce qui donne $\boxed{\Delta = -108(b^2 - a^3)}$.

De ces deux expressions de Δ on déduit en particulier que les deux réels (non nuls) $|c - x_1|^2|c - x_2|^2(c^2 - 4a)$ et $b^2 - a^3$ sont de même signe .

1.4.2.

• Si $P_{a,b}$ admet c pour unique racine réelle c'est que x_1 et x_2 sont non réelles conjuguées , et donc $(x_1 - x_2)^2 = (2iIm(x_1))^2 = -4Im^2(x_1) < 0$, et donc $\Delta = |c - x_1|^2|c - x_2|^2(x_1 - x_2)^2 < 0$, et donc $b^2 > a^3$.

• Réciproquement si $b^2 > a^3$ c'est que $\Delta = |c - x_1|^2|c - x_2|^2(x_1 - x_2)^2 < 0$ et donc $(x_1 - x_2)^2 < 0$, les deux racines x_1 et x_2 ne peuvent être réelles toutes les deux et sont donc non réelles conjuguées et c est par conséquent l'unique racine réelle du polynôme $P_{a,b}$.

• Si $b^2 < a^3$ alors $\Delta > 0$, le polynôme $P_{a,b}$ admet 3 racines réelles distinctes .

Deuxième partie

2.1.

• Les fonctions composantes $f : t \mapsto t^2$ et $g : t \mapsto t^3$ de γ sont clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en va donc de même pour γ .

• le point $\gamma(-t) = (t^2, -t^3)$ se déduit du point $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses autrement dit le support Γ de l'arc paramétré γ est symétrique par rapport à (Ox) .

2.2. On a pour tout réel t ,

$\begin{cases} f'(t) = 2t \\ g'(t) = 3t^2 \end{cases}$, $\begin{cases} f''(t) = 2 \\ g''(t) = 6t \end{cases}$ et $det\left(\gamma'(t), \gamma''(t)\right) = \begin{vmatrix} 2t & 2 \\ 3t^2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2$

et donc ,

• pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $det\left(\gamma'(t), \gamma''(t)\right) \neq 0$ ce qui signifie que le point $\gamma(t)$ est un point birégulier de la courbe γ .

• $\gamma^{'}(0) = (0,0)$ d'où $\gamma(0)$ est l'unique point stationnaire de γ , et comme $\gamma^{''}(0) = (2,0)$, $\gamma^{'''}(0) = (0,6)$ et $det\Big(\gamma^{''}(0), \gamma^{'''}(0)\Big) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$ on voit que $\gamma(0) = (0,0)$ est un point de rebroussement de première espèce de γ .

2.3.

• Pour $t_0 \in \mathbb{R}^*$ on sait que le point $\gamma(t_0)$ est birégulier , le vecteur non nul $\gamma^{'}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente $D_{\gamma(t_0)}$ en $\gamma(t_0)$ à la courbe et admet donc pour équation , $D_{\gamma(t_0)}$: $\begin{vmatrix} x - f(t_0) & f^{'}(t_0) \\ y - g(t_0) & g^{'}(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - t_0^2 & 2t_0 \\ y - t_0^3 & 3t_0^2 \end{vmatrix} = 0$, soit après simplification , $\boxed{D_{\gamma(t_0)} : y = \frac{3t_0}{2}(x - \frac{t_0^2}{3})}$.

• On a $\gamma^{''}(0) = (2,0) \neq (0,0)$ donc $\gamma^{''}(0)$ est un vecteur tangent à la courbe au point stationnaire $\gamma(0) = (0,0)$ et la tangente en ce point a donc pour équation $D_{\gamma(0)}$: $\begin{vmatrix} x - 0 & 2 \\ y - 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ soit , $\boxed{D_{\gamma(0)} : y = 0}$ (l'axe des abscisses) .

2.4.

• Les variations de f et g sont résumées dans le tableau suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f^{'}(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g^{'}(t)$		$+$	0	$+$	
$g(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

• On a $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t^3}{t^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \frac{g(t)}{f(t)} = \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{t^3}{t^2} = -\infty$ ce qui veut dire que la courbe admet deux branches paraboliques de direction (Oy) (*l'une se déduisant de l'autre par la symétrie d'axe* Ox) .

2.5. Le dessin de Γ est laissé à la question **3.3.3.** de la troisième partie .

Troisième partie

3.1.

3.1.1.

D'après la question **2.3.** de la partie précédente on a , $D_{\gamma(t_0)} : y = \frac{3t_0}{2}(x - \frac{t_0^2}{3})$ et donc si $D_{\gamma(t_0)}$ rencontre Γ en un point $\gamma(t)$ on doit avoir $t^3 = \frac{3t_0}{2}(t^2 - \frac{t_0^2}{3})$ c'est à dire $2t^3 - 3t_0t^2 + t_0^2 = 0$ et comme $D_{\gamma(t_0)}$ rencontre déjà Γ au point $\gamma(t_0)$, le polynôme en t , $2t^3-3t_0t^2+t_0^2$ est divisible par $t-t_0$ et la division euclidienne donne $2t^3-3t_0t^2+t_0^2=(t-t_0)(2t^2-t_0t-t_0^2)=(t-t_0)^2(2t+t_0)$ ce qui montre clairement que $D_{\gamma(t_0)}$ rencontre Γ en un unique point autre que $\gamma(t_0)$ qu'est le point $\gamma(t_1)$ où $t_1=-\dfrac{t_0}{2}$.

3.1.2.

Comme $t_1=-\dfrac{t_0}{2}\neq 0$ la tangente $D_{\gamma(t_1)}$ rencontre à son tour Γ en un unique point autre que $\gamma(t_1)$ qu'est le point $\gamma(t_2)$ où $t_2=-\dfrac{t_1}{2}\neq 0$. On construit ainsi une suite $(\gamma(t_n))_{n\geq 0}$ de points de Γ où , $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_{n+1}=-\dfrac{t_n}{2}$. La suite $(t_n)_{n\geq 0}$ étant géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme t_0 on a , $\forall n\in\mathbb{N}$, $t_n=t_0\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ ce qui donne , $\forall n\in\mathbb{N}$, $\gamma(t_n)=\left(\dfrac{t_0^2}{4^n},\dfrac{(-1)^nt_0^3}{8^n}\right)$. Et on voit clairement que la suite $(\gamma(t_n))_{n\geq 0}$ est convergente de limite le point $(0,0)$.

3.2.

3.2.1.

• Si $t=0$ (ou $t'=0$) on sait d'après la question **2.3.** de la partie précédente que la tangente $D_{\gamma(t)}$ est l'axe des abscisses et qu'aucune autre tangente à Γ ne lui est perpendiculaire .

• Si $t\neq 0$ et $t'\neq 0$ alors , $D_{\gamma(t)}:y=\dfrac{3t}{2}(x-\dfrac{t^2}{3})$ et $D_{\gamma(t')}:y=\dfrac{3t'}{2}(x-\dfrac{t'^2}{3})$ sont perpendiculaires si et seulement si , $\dfrac{3t}{2}\times\dfrac{3t'}{2}=-1$.

On conclut que pour tous réels t et t' on a , $\boxed{D_{\gamma(t)}\perp D_{\gamma(t')}\Leftrightarrow tt'=-\dfrac{4}{9}}$.

3.2.2.

S'il passe par le point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ deux tangentes $D_{\gamma(t)}$ et $D_{\gamma(t')}$ à Γ qui soient perpendiculaires alors on doit avoir $\begin{cases} y=\dfrac{3t}{2}(x-\dfrac{t^2}{3}) \\ y=\dfrac{3t'}{2}(x-\dfrac{t'^2}{3}) \\ tt'=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$ système qui s'écrit aussi $\begin{cases} t^3-3tx+2y=0 \\ t'^3-3t'x+2y=0 \\ tt'=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$ et on voit que t et t' sont deux racines distinctes du polynôme $P(Z)=Z^3-3xZ+2y$ qui s'écrit donc $P(Z)=(Z-t)(Z-t')(Z-\alpha)$ d'où $-tt'\alpha=2y$ ce qui donne $\alpha=\dfrac{9}{2}y$, et en écrivant $P(\alpha)=0$ on a ,

$\dfrac{27^2}{8}y^3-\dfrac{27}{2}xy+2y=0$ soit $y\left(\dfrac{27^2}{8}y^2-\dfrac{27}{2}x+2\right)=0$,

• si $y=0$ c'est que $x=\dfrac{t^2}{3}=\dfrac{t'^2}{3}$ et donc $t'=-t$ et par suite $t^2=-tt'=\dfrac{4}{9}$ ce qui donne $x=\dfrac{4}{27}$.

• sinon c'est que $\dfrac{27^2}{8}y^2-\dfrac{27}{2}x+2=0$ ce qui donne $y^2=\dfrac{4}{27}\left(x-\dfrac{4}{27}\right)$.

Et on voit que dans tout les cas on a , $\boxed{y^2=\dfrac{4}{27}\left(x-\dfrac{4}{27}\right)}$ (1) .

3.2.3.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant (1) , et $(t,t')\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} t+t'=-\dfrac{9}{2}y \\ tt'=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$, (t et t' ne sont autres que les solutions de l'équation du second degré en T , $T^2+\dfrac{9}{2}yT-\dfrac{4}{9}=0$ dont le discriminant est clairement strictement positif) .

Alors t , t' et $\alpha=-(t+t')=\dfrac{9}{2}y$ sont les trois solutions réelles de l'équation du troisième degré en Z , $Z^3-3xZ+2y=0$, car :

$$\begin{cases} t+t'+\alpha=0 \\ tt'+t\alpha+t'\alpha=-\dfrac{4}{9}-(t+t')^2=-\dfrac{4}{9}-\dfrac{9^2}{4}y^2=-3x \\ tt'\alpha=-2y \end{cases} .$$

Et en écrivant $\begin{cases} t^3-3tx+2y=0 \\ t'^3-3t'x+2y=0 \\ tt'=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$ ce qui est équivalent à $\begin{cases} y=\dfrac{3t}{2}(x-\dfrac{t^2}{3}) \\ y=\dfrac{3t'}{2}(x-\dfrac{t'^2}{3}) \\ tt'=-\dfrac{4}{9}\end{cases}$

on a le résultat demandé .

3.3. On note , $\mathcal{P}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ y^2=\dfrac{4}{27}\left(x-\dfrac{4}{27}\right)\right\}$.

Il est sous entendu que l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure affine euclidienne canonique ; on notera $(O,\vec{i},\vec{j})$ son repère orthonormé canonique .

3.3.1.

D'après le cours sur les coniques , $\mathcal{P}$ est clairement la parabole

• de sommet le point $\Omega\left(\dfrac{4}{27}\ ,\ 0\right)$

• d'axe de symétrie (Ox) .

• de directrice $\mathcal{D}$: $x=d$, et de foyer $F(a,0)$ vérifiant :

$M(x,y)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow MH=MF$ (*où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$*) ,

ce qui s'écrit , $(x-d)^2=(x-a)^2+y^2$, soit après simplification ,

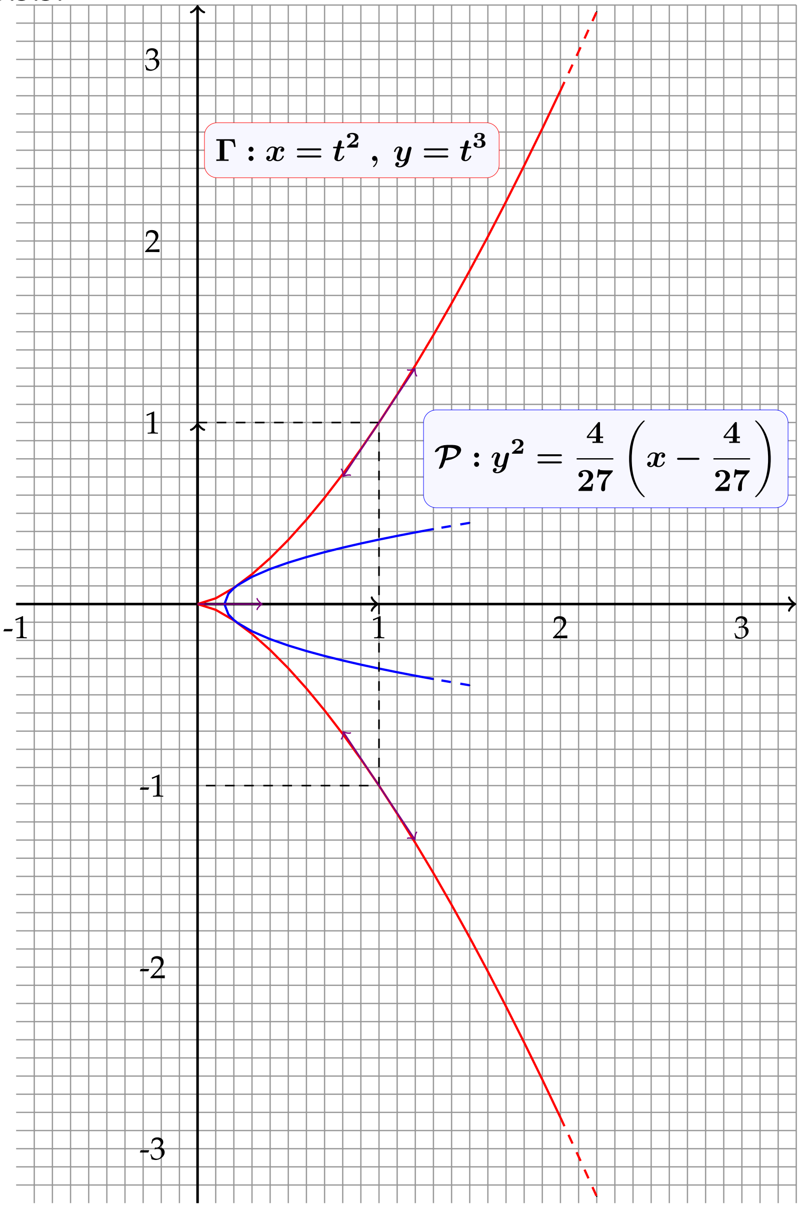
$y^2=2(a-d)\left(x-\dfrac{a+d}{2}\right)$ et par identification on a , $\begin{cases} a=\dfrac{5}{27} \\ d=\dfrac{3}{27}=\dfrac{1}{9}\end{cases}$.

3.3.2.

• On peut établir que $(X-2)^2(X+4) = X^3 - 12X + 16$ soit directement par développement soit en utilisant la factorisation de la question **1.2.1.** de la première partie qui donne , $(X-2)^2(X+4) = X^3 - 3(2)^2X + 2(2)^3 = X^3 - 12X + 16$.

• $M(t) \in \Gamma \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow (t^3)^2 = \dfrac{4}{27}\left(t^2 - \dfrac{4}{27}\right) \Leftrightarrow 27^2t^6 - 4(27t^2) + 16 = 0$, soit
$M(t) \in \Gamma \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow (9t^2)^3 - 12(9t^2) + 16 = 0 \Leftrightarrow (9t^2 - 2)^2(9t^2 + 4) = 0$, soit
$M(t) \in \Gamma \cap \mathcal{P} \Leftrightarrow 9t^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, la courbe Γ rencontre donc la parabole $\mathcal{P}$ en les deux points $\left(\dfrac{2}{9}\ ,\ \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{27}\right)$.

3.3.3.



✓ FIN DU CORRIGÉ ✓